جامعة البعث	الدورة الإضافية 2017 – 2016	المدة :ساعة ونصف
كلية العلوم	لمقرر : نظرية الأعداد	الدرجة : 100
قسم الرياضيات		

السؤال الأول: (30 درجة)

١) إذا كان $m \geq 2$ عدداً صحيحاً موجباً بحيث ليس له أي قاسم أولي $p \leq \sqrt{m}$ ، فأثبت أن m عدد أولي.

٢) اثبت أن العدد (101) أولي وبين أن العدد (101) يقسم العدد $\left[(100)^{100}-1\right]$.

السؤال الثاني (40 درجة) :

١) اكتب القاسم المشترك الأعظم للعددين: 36 ; 56، كتركيب خطي لهما.

٢) حل المعادلة: $56x + 36y = 92$ ، وعيّن حلولها الموجبة (في حال وجودها).

٣) حل التطابق الخطي: $10x \equiv 6 \pmod{12}$.

السؤال الثالث(30 درجة) :

ليكن $\sigma(n)$ قيمة التابع الذي يقابل العدد الطبيعي n بمجموع قواسمه الموجبة المختلفة:

١) إذا كان $n = p^k$ حيث p عدد أولي و k عدد طبيعي موجب، فأثبت أن:

$$\sigma(n) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

٢) إذا كان: $n = 2^k \cdot p$ ، حيث : $p = (2^{k+1}-1)$ عدد أولي، فأثبت أن: $\sigma(n) = 2n$.

د . ياسين خلوف



سلم تصحيح امتحان مقرر / نظرية الأعداد / الدورة الإضافية ٢٠١٦-٢٠١٧

د. [illegible]

السؤال الأول (30):

1) إذا لم يكن m أولياً فإنه يوجد $m = a.b$ حيث $1 < a, b < m$ وعندئذٍ:
إذا كان كل من $a, b > \sqrt{m}$ فإنه $m = ab > \sqrt{m}.\sqrt{m} = m$ وهذا مستحيل. لذلك يجب أن يكون على الأقل أحد العددين a أو $b \leq \sqrt{m}$. ولنفرض أنه $a \leq \sqrt{m}$. ولأنه $a > 1$ فهو إما أن يكون أولي أو أنه جداء لأعداد أولية ولنأخذ أي قاسم أولي وليكن p للعدد a هو قاسم للعدد m. وعليه إذا لم يكن m أولياً فيكون له قاسم أولي مثل p بحيث $p \leq \sqrt{m}$. ومنه إذا لم يكن لـ m قاسم أولي $p \leq \sqrt{m}$ حتماً سيكون m أولياً.

2) إنه $(10)^2 < 101 < (11)^2$ وعليه إذا لم يكن أحد الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7$ قاسماً للعدد (101) فهو عدد أولي. وبالتجريب نجد أن العدد (101) لا يقبل القسمة على أي من الأعداد السابقة فهو لذلك عدد أولي.
ولأنه $d(100, 101) = 1$ و (101) أولي فحسب مبرهنة فرما يكون:

$$(100)^{101-1} \equiv 1 \pmod{101} \iff (100)^{100} \equiv 1 \pmod{101}$$

وهذا يكافئ أنه

$$(101) \mid [(100)^{100} - 1]$$

السؤال الثاني (40):

1)

$$\left.\begin{array}{l} 56 = 1.36 + 20 \\ 36 = 1.20 + 16 \\ 20 = 1.16 + \boxed{4} \\ 16 = 4.4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d(56, 36) = 4}$$

و

$$4 = 20 - 16 = 20 - (36 - 20) = -36 + 2.(20) =$$
$$= -36 + 2(56 - 36) = 2(56) + (-3)(36)$$

إذن

$$(*): \boxed{4 = 2(56) + (-3)(36)}$$

2) إنه $d(56, 36) = 4 \mid 92$ وبالضرب بـ (23) لـ $(*)$ نجد:

$$92 = (46)(56) + (-69)(36) \Rightarrow x_0 = 46 ; y_0 = -69$$

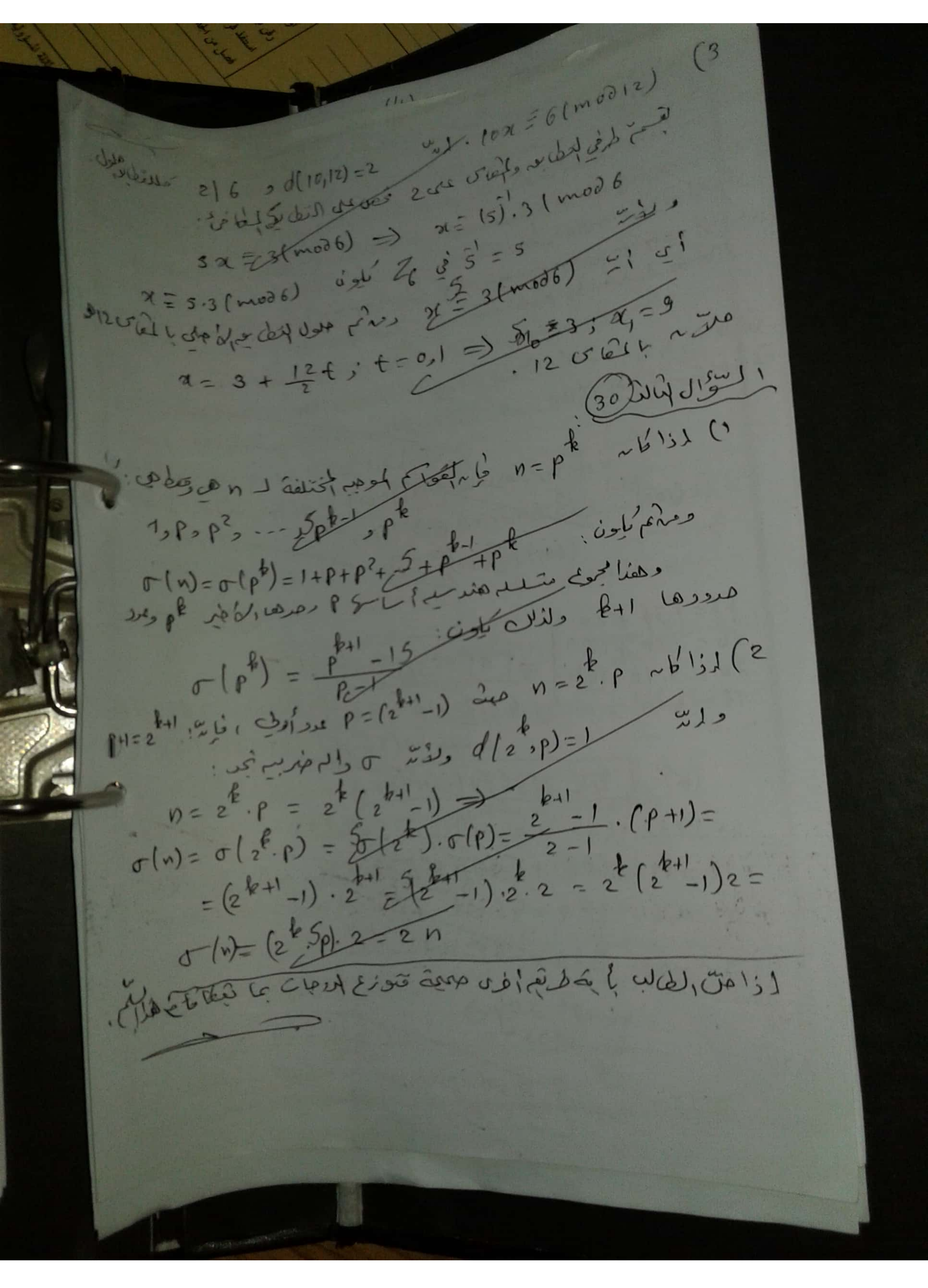
حل للمعادلة ويكون الحل العام:

$$x = 46 + \frac{36}{4}t = 46 + 9t$$
$$y = -69 - \frac{56}{4}t = -69 - 14t \quad ; \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} : \quad \left.\begin{array}{l} 46 + 9t > 0 \\ -69 - 14t > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t > \frac{-46}{9} = -5\frac{1}{9} \\ t < \frac{-69}{14} = -4\frac{13}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow t = -5$$

وعندئذٍ يكون

$$x = y = 1 ; \quad \left\{\begin{array}{l} x = 46 + 9(-5) = 1 \\ y = -69 - 14(-5) = 1 \end{array}\right.$$



(3

ملاحظة: حلول

$10x \equiv 6 \pmod{12}$ (1) لدينا . نقسم طرفي التطابق والقياس على 2 فنحصل على التطابق المكافئ:

$2|6$ و $d(10,12)=2$

$5x \equiv 3 \pmod 6 \Rightarrow x \equiv (5)^{-1}\cdot 3 \pmod 6$ ولكن

$x \equiv 5\cdot 3 \pmod 6$ لأن في Z_6 يكون $5^{-1}=5$ أي أن

$x \equiv 3 \pmod 6$ ومنه حلول التطابق الأصلي بالقياس 12 هي

$x = 3 + \frac{12}{2}t \; ; \; t=0,1 \Rightarrow x_0 = 3 \; ; \; x_1 = 9$ مختلفة بالقياس 12.

السؤال الثالث (30)

1) إذا كان $n=p^k$ فإن القواسم الموجبة المختلفة لـ n هي:

$1, p, p^2, \ldots, p^{k-1}, p^k$ ومنه يكون:

$\sigma(n)=\sigma(p^k)=1+p+p^2+\ldots+p^{k-1}+p^k$

وهذا مجموع متسلسلة هندسية أساسها p وحدها الأخير p^k وعدد حدودها $k+1$ ولذلك يكون:

$\sigma(p^k)=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$

2) إذا كان $n=2^k\cdot p$ حيث $p=(2^{k+1}-1)$ عدد أولي، فإن: $p+1=2^{k+1}$

ولدينا $d(2^k,p)=1$ ولأن σ دالة ضربية نجد:

$n=2^k\cdot p = 2^k(2^{k+1}-1) \Rightarrow$

$\sigma(n)=\sigma(2^k\cdot p)=\sigma(2^k)\cdot\sigma(p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}\cdot(p+1)=$

$=(2^{k+1}-1)\cdot 2^{k+1} = (2^{k+1}-1)\cdot 2^k\cdot 2 = 2^k(2^{k+1}-1)2=$

$\sigma(n)=(2^k\cdot p)\cdot 2 = 2n$

إذا حل الطالب بأية طريقة أخرى صحيحة توزع الدرجات بما يتناسب مع هذا السلم.